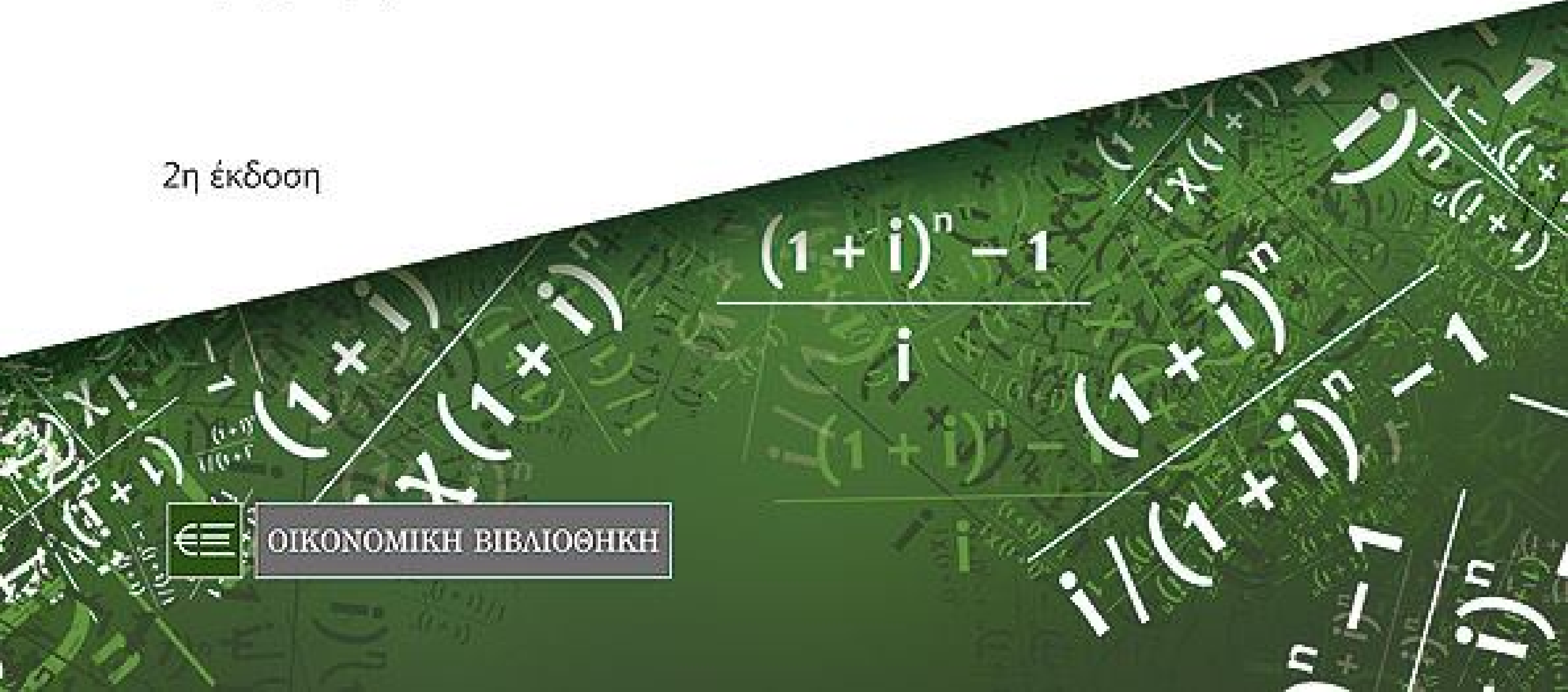
Νίκος Σγουρινάκης
Οικονομολόγος (ΑΣΟΕΕ), Διδάσκων στο ΤΕΙ Πειραιά

Οικονομικά Μαθηματικά
Εφαρμοσμένα

Βραχυπρόθεσμες και Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις

- Τόκος - Ανατοκισμός
- Ισοδύναμες Συναλλαγματικές
- Χρηματοσειρές
- Δάνεια
- Εφαρμογές

2η έκδοση



ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Οικονομικά Μαθηματικά
Νίκος Σγουρινάκης

ISBN 978-960-562-463-7

Art Director:	Θεόδωρος Μαστρογιάννης
Υπεύθυνος Παραγωγής:	Ανδρέας Μενούνος
Φωτοστοιχειοθεσία:	Θεώνη Χαραλαμπάκη
Παραγωγή:	NB Production AM011015M23

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Μαυρομιχάλη 23, 106 80 Αθήνα
Τηλ.: 210 3678 800 • Fax: 210 3678 819
http://www.nb.org • e-mail: info@nb.org
Αθήνα: Μαυρομιχάλη 2, 106 79 • Τηλ.: 210 3607 521
Πειραιάς: Φίλωνος 107-109, 185 36 • Τηλ: 210 4184 212
Πάτρα: Κανάρη 15, 262 22 • Τηλ.: 2610 361 600
Θεσ/νίκη: Φράγκων 1, 546 26 • Τηλ.: 2310 532 134

member of Europe's 500 dynamic entrepreneurs

EFQM Committed to excellence

Νίκος Σγουρινάκης
Οικονομολόγος (ΑΣΟΕΕ), Διδάσκων στο ΤΕΙ Πειραιά

Οικονομικά Μαθηματικά

Ε φ α ρ μ ο σ μ έ ν α

Βραχυπρόθεσμες και Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις

- Τόκος - Ανατοκισμός
- Ισοδύναμες Συναλλαγματικές
- Χρηματοσειρές
- Δάνεια
- Εφαρμογές

2η έκδοση

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Financial Mathematics
Nikos Sgourinakis

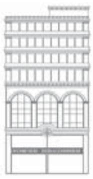
ISBN 978-960-562-463-7

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

23, Mavromichali Str., 106 80 Athens Greece
Tel.: +30 210 3678 800 • Fax: +30 210 3678 819
http://www.nb.org • e-mail: info@nb.org

europe500
member of Europe's 500 dynamic entrepreneurs

EFQM
Committed to excellence



ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Στην παρούσα δεύτερη έκδοση του έργου: **«Οικονομικά Μαθηματικά»**, προστέθηκαν ανά κεφάλαιο, παράγραφοι, με τον τίτλο «εφαρμογές», στις οποίες περιλαμβάνονται λυμένες ασκήσεις με τεκμηρίωση της λύσης τους, με στόχο την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη κάλυψη του γνωστικού αντικειμένου. Υπό την έννοια αυτή, η προσθήκη του όρου: **«εφαρμοσμένα»,** στον τίτλο του βιβλίου, καθίσταται αναγκαία.

Ωστόσο, όπως είναι γνωστό, τα **Μαθηματικά** διακρίνονται σε **Θεωρητικά** και **Εφαρμοσμένα.** Τα Θεωρητικά Μαθηματικά αποτελούν το σύνολο των γνώσεων της Μαθηματικής Επιστήμης, με αναφορά προς την θεμελίωση, την διερεύνηση, την τεκμηρίωση και την απόδειξη του πλαισίου των νόμων που διέπουν την συγκεκριμένη επιστήμη, ενώ τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά αποτελούν το σύνολο των επιστημονικών κλάδων που εφαρμόζουν την επιστήμη των Μαθηματικών, **ως εργαλείο.** Οι επιστημονικοί αυτοί κλάδοι είναι η Στατιστική, η Φυσική, η Μετεωρολογία, η Οικονομική κ.λπ. Συνεπώς, τα Οικονομικά Μαθηματικά, είναι ένας κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, τα οποία ως κυρίαρχο γνωστικό αντικείμενό τους, έχουν το σύνολο των πράξεων και υπολογισμών που διενεργούνται, προκειμένου να προσδιοριστούν τα αποτελέσματα συγκεκριμένων και εξειδικευμένων **εμπορικών συναλλαγών,** εντός των δεδομένων της κινητικότητας και δραστηριότητας του ευρύτερου επιχειρηματικού και χρηματοπιστωτικού περιβάλλοντος.

Όπως αναφερόταν στον πρόλογο της πρώτης έκδοσης του έργου, η θετική απόδοση των χρηματικών καταθέσεων, δηλαδή η δημιουργία **εισοδήματος από τόκους,** έχει ως αντιστάθμισμα την περίπτωση της εναλλακτικής τοποθέτησης των καταθέσεων αυτών, **σε επενδυτική δραστηριότητα.** Το ζήτημα αυτό, σε συσχετισμό με την τυχόν λήψη δανείου και το ύψος του χρηματοοικονομικού του κόστους (τόκοι, έξοδα), αλλά και της δυνατότητας χρηματοδοτικής αξιοποίησης των αξιογράφων (συναλλαγματικών – επιταγών) από την επιχείρηση ή τον ιδιώτη κομιστή, ασφαλώς δε και της συγκριτικής απόδοσης των κεφαλαιακών τοποθετήσεων, αποτελούν τομείς «δράσης» των Οικονομικών Μαθηματικών.

Το γεγονός, ότι τις δύο τελευταίες δεκαετίες, ίσως και αρκετά πιο πριν, ο ρόλος των Οικονομικών Μαθηματικών, ως εφαρμοσμένων και ως διδακτέου μαθήματος, εμφανίζεται να έχει υποβαθμιστεί, οφείλεται, σε υπέρτατο βαθμό, στην ανάπτυξη των αυτόματων υπολογιστικών διαδικασιών και στην παραμετροποίηση των εμπορικών δεδομένων, με αποτέλεσμα τα προβλήματα, να επιλύονται με απλή εισαγωγή στοιχείων στον Η/Υ, χωρίς να απαιτείται η «επέμβαση» της ανθρώπινης σκέψης, για την κατάληξη σε αριθμητικό αποτέλεσμα.

Ωστόσο, εκείνο που έχει σημασία, στο πλαίσιο της διαδικασίας μάθησης, και που ασφαλώς επιδιώκεται στην καθημερινή πρακτική, είναι ο τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος, ο λογικός συνειρμός, η σειρά των παραμέτρων που το απαρτίζουν και η τελική διαπίστωση της ορθής απόφασης που λαμβάνεται.

Στο πνεύμα αυτό, η παρούσα νέα έκδοση του βιβλίου, θέτει ως στόχο, την εκπαίδευση όλων όσων ασχολούνται στο επίπεδο των χρηματοπιστωτικών συναλλαγών, σε τέτοιο βαθμό, ώστε να συνειδητοποιούν τις καθημερινές καταχωρίσεις τους στα συστήματα των Η/Υ και ταυτόχρονα να είναι σε θέση να ελέγξουν τις αριθμητικές πράξεις, όπου αυτό είναι αναγκαίο, για να προχωρήσουν σε επεξηγήσεις.

Το περιεχόμενο του έργου, όπως και στην πρώτη έκδοση, αναλύεται σε έξι κεφάλαια (Απλός τόκος, Προεξόφληση, Ισοδύναμες συναλλαγματικές, Ανατοκισμός, Χρηματοσειρές και Δάνεια), ενώ περιλαμβάνονται και οι Οικονομικοί Πίνακες για τον εύκολο υπολογισμό των μαθηματικών τύπων, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η επίλυση των προβλημάτων. Οι πίνακες έχουν ληφθεί αυτούσιοι από την αρχική έκδοση του βοηθήματος.

Επιπλέον, πέραν των εφαρμογών που προστέθηκαν, παρατίθενται αναλυτικά παραδείγματα ανά κεφάλαιο, ώστε να διευκρινίζεται η διαδικασία μαθηματικής εφαρμογής των δεδομένων και να απλοποιούνται οι αριθμητικές πράξεις. Κατά την παραδοσιακή αντίληψη του συγγραφέα, στην απεικόνιση των μαθηματικών πράξεων του πολλαπλασιασμού, χρησιμοποιείται το σύμβολο **«x»** και όχι το σημείο της τελείας (.).

Από τη θέση μου, οφείλω και πάλι να ευχαριστήσω τους συντελεστές της νέας αυτής προσπάθειας, τόσο ως προς την τεχνική διαμόρφωση των κειμένων και την τελική παρουσίαση του έργου, όσο και ως προς την απόφαση της **«Νομικής Βιβλιοθήκης»**, να στηρίξει την δεύτερη έκδοση του έργου.

Οκτώβριος 2015

Νίκος Σγουρινάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

1. Ο τόκος των χρηματικών κεφαλαίων 1

2. Υπολογισμός του απλού τόκου

2.1. Εύρεση του τόκου, του κεφαλαίου, του χρόνου και του επιτοκίου 4

2.2. Υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών 7

2.3. Ο Τοκάριθμος και ο Σταθερός Διαιρέτης 7

2.4. Το μέσο επιτόκιο 9

2.5. Κεφάλαιο αυξημένο ή ελαττωμένο κατά τον τόκο του 11

3. Εφαρμογές επί του απλού τόκου 12

4. Ασκήσεις απλού τόκου προς λύση 14

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ 19

Β. ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ

1. Προεξόφληση (Υφαίρεση)

1.1. Εσωτερικό προεξόφλημα 21

1.2. Εξωτερικό προεξόφλημα 23

1.3. Εσωτερική υφαίρεση και ΦΠΑ 24

2. Η συναλλαγματική και το γραμμάτιο σε διαταγή 25

3. Η αξία της συναλλαγματικής κατά την προεξόφληση 27

4. Προεξόφληση όταν υπολογίζονται και έξοδα 28

5. Πινάκιο προεξόφλησης 29

6. Εύρεση πραγματικού επιτοκίου προεξόφλησης 30

7. Εύρεση της ονομαστικής αξίας όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία μιας συναλλαγματικής 31

8. Εφαρμογές επί της προεξόφλησης 32

9. Ασκήσεις προεξόφλησης προς λύση 34

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ 37

Γ. ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΕΣ

1. Γενικά για τις ισοδύναμες συναλλαγματικές 39

2. Ισοδυναμία συναλλαγματικών 40

3. Ονομαστική αξία της νέας συναλλαγματικής

3.1. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού 45

3.2. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη 46

4. Κοινή λήξη συναλλαγματικών 48

5. Μέση λήξη συναλλαγματικών 48

6. Εφαρμογές στις Ισοδύναμες Συναλλαγματικές 49

6.1. Εποχή Ισοδυναμίας: η ημέρα υπολογισμού 50

6.2. Εποχή Ισοδυναμίας: η κοινή λήξη 51

7. Ασκήσεις ισοδυναμίας και κοινής λήξης, προς λύση 52

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ 55

Δ. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

1. Η έννοια του Ανατοκισμού 57

2. Ορισμοί στον ανατοκισμό και χρήση των πινάκων 59

2.1. Ο γενικός μαθηματικός τύπος του ανατοκισμού 60

3. Εύρεση των μεγεθών του ανατοκισμού

3.1. Εύρεση της τελικής αξίας κεφαλαίου για χρονικό διάστημα στο οποίο περιέχεται και κλάσμα περιόδου 63

3.2. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστή η τελική αξία αυτού.. 64

3.3. Εύρεση του χρόνου 66

3.4. Εύρεση του επιτοκίου.. 68

4. Ανάλογο και Ισοδύναμο Επιτόκιο

4.1. Ανάλογο Επιτόκιο 69

4.2. Ισοδύναμο Επιτόκιο.. 70

5. Εφαρμογές στον Ανατοκισμό.. 72

6. Ασκήσεις ανατοκισμού προς λύση 74

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ.. 77

Ε. ΧΡΗΜΑΤΟΣΕΙΡΕΣ (ΡΑΝΤΕΣ)

1. Ορισμοί και σύμβολα χρηματοσειρών 79

2. Σταθερή και ληξιπρόθεσμη χρηματοσειρά

2.1. Εύρεση της τελικής αξίας χρηματοσειράς, όταν είναι σταθερή και ληξιπρόθεσμη... 81

2.2. Εύρεση της αρχικής ή παρούσας αξίας χρηματοσειράς, όταν είναι σταθερή και ληξιπρόθεσμη 84

2.3. Εύρεση του όρου ληξιπρόθεσμης χρηματοσειράς 86

2.4. Εύρεση του πλήθους των όρων ληξιπρόθεσμης χρηματοσειράς....... 87

2.5. Εύρεση του επιτοκίου ληξιπρόθεσμης χρηματοσειράς 89

3. Σταθερή και προκαταβλητέα χρηματοσειρά

3.1. Εύρεση της τελικής αξίας χρηματοσειράς που είναι σταθερή και προκαταβλητέα... 89

3.2. Εύρεση της αρχικής αξίας χρηματοσειράς, όταν είναι σταθερή και προκαταβλητέα 91

4. Εφαρμογές στις χρηματοσειρές 92

5. Ασκήσεις στις χρηματοσειρές 94

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΧΡΗΜΑΤΟΣΕΙΡΩΝ (ΡΑΝΤΩΝ) 96

ΣΤ. ΔΑΝΕΙΑ

1. Δανεισμός επιχειρήσεων 99

2. Μεταχρονολογημένες επιταγές 100

3. Βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα δάνεια – Έντοκα γραμμάτια 102

4. Δάνεια ενιαία, εξοφλητέα εντός ορισμένου χρόνου τοκοχρεολυτικώς με ίσα τοκοχρεολύσια

4.1. Εύρεση του τοκοχρεολυσίου 108

4.2. Παρατηρήσεις 109

5. Συστήματα χρεολυσίας

5.1. Σύστημα σταθερού χρεολυσίου 110

5.2. Σύστημα προοδευτικού χρεολυσίου 111

5.3. Περαιτέρω ανάλυση του συστήματος του προοδευτικού χρεολυσίου 112

5.4. Μέθοδος των δύο επιτοκίων 116

6. Μακροπρόθεσμα τραπεζικά δάνεια σε ιδιώτες 117

7. Δάνεια που χορηγούνται με τίτλους (ομολογίες)

7.1. Βασικές οικονομικές έννοιες 118

7.2. Ομολογίες μετατρέψιμες σε μετοχές 119

7.3. Ομολογίες με συμμετοχή στα κέρδη 120

7.4. Διακρίσεις ομολογιών 120

7.5. Δάνεια με ομολογίες που εξοφλούνται τοκοχρεολυτικώς στο άρτιο 121

7.6. Δάνεια με ομολογίες, που εξοφλούνται τοκοχρεολυτικώς, σε τιμή διαφορετική από το άρτιο 127

8. Εφαρμογές επί των δανείων 130

9. Ασκήσεις επί των δανείων 131

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΔΑΝΕΙΩΝ 135

Ζ. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Για την λύση των προβλημάτων των Μακροπρόθεσμων Οικονομικών Πράξεων (Ανατοκισμού, Χρηματοσειρών, Δανείων)

Πίνακας Α: Τιμές της παράστασης $(1+i)^n$

Τελική αξία μίας (1) νομισματικής μονάδας ανατοκιζόμενης επί 1, 2, 3, 4, ... 50 περιόδους ανατοκισμού 139

Πίνακας $Α_1$: Τιμές της παράστασης $(1+i)^{\frac{\mu}{12}}$

Τελική αξία μίας (1) νομισματικής μονάδας ανατοκιζόμενης επί 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 δωδέκατα της περιόδου ανατοκισμού 145

Πίνακας Β: Τιμές της παράστασης $\frac{1}{(1+i)^n}$

Παρούσα αξία (1) μίας νομισματικής μονάδας προεξοφλούμενης με ανατοκισμό 1, 2, 3, 4, ... 50 περιόδους ανατοκισμού, πριν από την λήξη της 149

Πίνακας Γ: Τιμές της παράστασης $\frac{(1+i)^n-1}{i}$

Τελική αξία χρηματοσειράς μίας (1) νομισματικής μονάδας, όρων (n) από 1-50, καταβαλλόμενης στο τέλος κάθε περιόδου ανατοκισμού 155

Πίνακας Γ_1: Τιμές της παράστασης $(1 + i) \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία χρηματοσειράς μίας (1) νομισματικής μονάδας, όρων (n) από 1-50, καταβαλλόμενης στην αρχή κάθε περιόδου ανατοκισμού 161

Πίνακας Δ: Τιμές της παράστασης $\frac{(1 + i)^n - 1}{i \times (1 + i)^n}$

Αρχική αξία χρηματοσειράς μίας (1) νομισματικής μονάδας, όρων (n) 1-50, καταβαλλόμενης στο τέλος κάθε περιόδου ανατοκισμού 167

Πίνακας Ε: Τιμές της παράστασης $\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$

Χρεολύσιο που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου (1-50) ανατοκισμού και εξοφλεί δάνειο μίας (1) νομισματικής μονάδας 173

2. Υπολογισμός του απλού τόκου[1]

2.1. Εύρεση του τόκου, του κεφαλαίου, του χρόνου και του επιτοκίου

Τα προβλήματα των βραχυπρόθεσμων οικονομικών πράξεων λύνονται με υπολογισμό του απλού τόκου, χωρίς δηλαδή υπολογισμό τόκου πάνω στον τόκο (ανατοκισμός). Σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί, μία νομισματική μονάδα δίνει σε μία χρονική περίοδο (κατά κανόνα ένα έτος), τόκο i νομισματικών μονάδων. Αν τοκίσουμε Κ νομισματικές μονάδες για n χρονικές μονάδες (έτη), ο τόκος είναι Ι.

Η κατάταξη του προβλήματος αυτού είναι:

(α) Για έτη: 1 νομισματική μονάδα, σε 1 έτος δίνει τόκο i
Κ νομισματικές μονάδες, σε n έτη πόσο τόκο (Ι) δίνουν;
Οπότε έχουμε:

$$\boxed{\mathrm{I} = i \times \frac{K}{1} \times \frac{n}{1} = K \times n \times i \Rightarrow \mathrm{I} = K \times n \times i}$$

(β) Για μήνες: 1 νομισματική μονάδα, σε 12 μήνες δίνει τόκο i
Κ νομισματικές μονάδες, σε μ μήνες πόσο τόκο (Ι) δίνουν;
Οπότε έχουμε:

$$\boxed{\mathrm{I} = i \times \frac{K}{1} \times \frac{\mu}{12} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{K \times \mu \times i}{12}}$$

(γ) Για ημέρες: 1 νομ. μονάδα σε 360 ημέρες δίνει τόκο i
Κ νομ. μονάδες σε ν ημέρες πόσο τόκο (Ι) δίνουν;
Οπότε έχουμε:
μικτό ή εμπορικό έτος:

$$\boxed{\mathrm{I} = i \times \frac{K}{1} \times \frac{\nu}{360} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{K \times \nu \times i}{360}}$$

ενώ αν πρόκειται για πολιτικό έτος είναι:

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{K \times \nu \times i}{365 \text{ (ή } 366)}}$$

Σημειώνεται ότι ο τύπος του τόκου είναι δυνατόν να προκύψει και με τους ακόλουθους συλλογισμούς:

1 νομ. μονάδα σε 1 έτος δίνει τόκο i
2 νομ. μονάδες σε 1 έτος δίνουν τόκο $2 \times i$
2 νομ. μονάδες σε 2 έτη δίνουν τόκο $2 \times 2 \times i$
3 νομ. μονάδες σε 3 έτη δίνουν τόκο $2 \times 3 \times i$
....
Κ νομ. μονάδες σε n έτη δίνουν τόκο $K \times n \times i$

1. Για την πράξη του πολλαπλασιασμού, εφεξής, θα χρησιμοποιείται το σύμβολο «×».

Επομένως ο τύπος με τον οποίο βρίσκουμε τον τόκο είναι (έτη - μήνες - ημέρες):

$$\boxed{\mathrm{I} = K \times n \times i \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{K \times \mu \times i}{12} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{K \times \nu \times i}{360 \text{ ή } 365 \text{ ή } 366}}$$

Σε περίπτωση που ο τόκος, ο οποίος προκύπτει από κάποιο χρηματικό κεφάλαιο είναι γνωστός και ζητείται κάποια άλλη μεταβλητή, τότε λύνουμε την παραπάνω εξίσωση, ως προς την μεταβλητή αυτή και έχουμε:

(α) Αν αναζητείται το κεφάλαιο Κ:

Τότε διαιρούμε το άλλο μέρος της ισότητας με τους συντελεστές του άγνωστου Κ και έχουμε:

$$\boxed{K = \frac{\mathrm{I}}{n \times i}}$$

(β) Αν είναι άγνωστος ο χρόνος n:

Ομοίως, έχουμε:

$$\boxed{n = \frac{\mathrm{I}}{K \times i}}$$

(γ) Αν είναι άγνωστο το επιτόκιο i:

Ομοίως, έχουμε:

$$\boxed{i = \frac{\mathrm{I}}{K \times n}}$$

Από τις πιο πάνω ισότητες παρατηρούμε ότι κάθε συντελεστής εκτός από τον τόκο βρίσκεται αν διαιρέσουμε το ποσό του τόκου με τους υπόλοιπους συντελεστές.

Αν πρόκειται για μήνες ή ημέρες οι αντίστοιχοι τύποι είναι:

(α) Για μήνες

Από τον τύπο: $\mathrm{I} = \frac{K \times \mu \times i}{12}$, παίρνουμε: $12 \times \mathrm{I} = K \times \mu \times i \Rightarrow$ $\boxed{\mu = \frac{12 \times \mathrm{I}}{K \times i}}$

Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$\boxed{K = \frac{12 \times \mathrm{I}}{\mu \times i}}$ (για κεφάλαιο)

$\boxed{i = \frac{12 \times \mathrm{I}}{K \times \mu}}$ (για επιτόκιο)

(β) Για ημέρες

– Αν πρόκειται για μικτό ή εμπορικό έτος:

$$\mathrm{I} = \frac{K \times \nu \times i}{360} \Rightarrow 360 \times \mathrm{I} = K \times \nu \times i \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu = \frac{360 \times \mathrm{I}}{K \times i}} \quad \boxed{K = \frac{360 \times \mathrm{I}}{\nu \times i}} \quad \boxed{i = \frac{360 \times \mathrm{I}}{K \times \nu}}$$

– Αν πρόκειται για πολιτικό έτος τότε αντί του 360 θέτουμε τον αριθμό των ημερών 365 ή 366 (για δίσεκτο).

Παραδείγματα εύρεσης τόκου, κεφαλαίου, επιτοκίου (ο χρόνος σε έτη, χωρίς ανατοκισμό στο τέλος κάθε έτους)

(α) Πόσο τόκο δίνει κεφάλαιο 10.000 €, αν τοκιστεί για 3 έτη με επιτόκιο 5%;

Έχουμε: $\mathrm{I} = K \times n \times i$ ή $\mathrm{I} = 10.000,00 \times 3 \times 0,05 = 1.500,00$ €

(β) Ποιο κεφάλαιο αν τοκιστεί για 3 έτη με επιτόκιο 6% δίνει τόκο 1800 €;

Έχουμε: $K = \dfrac{\mathrm{I}}{n \times i} \Rightarrow K = \dfrac{1.800,00}{3 \times 0,06} = \dfrac{1.800,00}{0,18} = 10.000,00$ €

(γ) Για πόσο χρόνο τοκίστηκε κεφάλαιο 10.000 € προς 4% και έδωσε τόκο 1200 €;

Έχουμε: $n = \dfrac{\mathrm{I}}{K \times i} \Rightarrow n = \dfrac{1.200,00}{10.000,00 \times 0,04} = \dfrac{1.200,00}{400,00} = 3$ έτη

(δ) Προς ποιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο 10.000 €, για 3 έτη και έδωσε τόκο 3000 €;

Έχουμε: $i = \dfrac{\mathrm{I}}{K \times n} \Rightarrow i = \dfrac{3.000,00}{10.000,00 \times 3} = \dfrac{3.000,00}{30.000,00} = 0,10$ ή 10%

Παραδείγματα όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες και ημέρες

(α) Πόσο τόκο δίνουν 3.000 € αν τοκιστούν για 1 έτος και 2 μήνες, με επιτόκιο 4%;

Μετατρέπουμε το έτος σε μήνες και έχουμε 12 + 2 = 14 μήνες.

Από τον τύπο του τόκου παίρνουμε:

$$\mathrm{I} = \frac{K \times \mu \times i}{12} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{3.000,00 \times 14 \times 0,04}{12} = 140 \text{ €}$$

(β) Πόσο τόκο δίνουν 9.000 € αν τοκιστούν προς 5% για 70 ημέρες;

(Να υπολογιστεί ο τόκος για έτος μικτό ή εμπορικό και για έτος πολιτικό.)

– Για έτος μικτό ή εμπορικό είναι: $\mathrm{I} = \dfrac{9.000,00 \times 70 \times 0,05}{360} = 87,50$ €

– Για έτος πολιτικό είναι: $I = \dfrac{9.000,00 \times 70 \times 0,05}{365} = 86,30$ €

2.2. Υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών

Στις περιπτώσεις που δίνεται ο χρόνος από μία συγκεκριμένη ημερομηνία μέχρι μία άλλη π.χ. από 14 Μαρτίου μέχρι 14 Μαΐου του 2014 τότε, θα πρέπει να έχουμε την πληροφορία, αν η πρώτη ημέρα είναι ή δεν είναι τοκοφόρα. Αν η πρώτη ημέρα **δεν είναι τοκοφόρα**, τότε ο υπολογισμός των ημερών γίνεται:

(α) Για μικτό και πολιτικό έτος

15/3 - 31/3 ημέρες	16
1/4 - 30/4 ημέρες	30
1/5 - 14/5 ημέρες	14
Σύνολο	60 ημέρες

(β) Για εμπορικό έτος (όλοι οι μήνες έχουν από 30 ημέρες)

15/3 - 30/3 ημέρες	15
1/4 - 30/4 ημέρες	30
1/5 - 14/5 ημέρες	14
Σύνολο	59 ημέρες

Επομένως, όπως ήδη έχει αναφερθεί για το πολιτικό και μικτό έτος οι ημέρες υπολογίζονται κανονικά όπως και στο ημερολογιακό έτος, ενώ για το εμπορικό κάθε μήνας έχει 30 ημέρες. Αντιθέτως, αν η πρώτη ημέρα του χρονικού διαστήματος θεωρείται τοκοφόρα, τότε αντιστοίχως θα ήταν 61 ημέρες για το μικτό και πολιτικό έτος και 60 ημέρες για το εμπορικό έτος. Υπενθυμίζεται ότι το σύνολο των ημερών του έτους στην περίπτωση του πολιτικού έτους είναι 365, ενώ για το εμπορικό ή μικτό είναι 360 ημέρες.

2.3. Ο Τοκάριθμος και ο Σταθερός Διαιρέτης

Οι εμπορικές πράξεις απαιτούν ταχύτητα υπολογισμών. Αυτός βασικά είναι ο λόγος που τα διάφορα προβλήματα πρέπει να λύνονται με τον πιο απλό και σύντομο τρόπο. Η παραμετροποίηση και η ανάπτυξη των υπολογιστικών προγραμμάτων, μέσω των αλγορίθμων, έχει βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση, ώστε να προκύπτουν αμέσως και με ασφάλεια οι αριθμητικές τιμές των μεταβλητών. Στα προβλήματα του τόκου, ειδικότερα δε όταν πρόκειται για τον τόκο κεφαλαίων τα οποία τοκίζονται σε διαφορετικούς χρόνους, αλλά με το ίδιο επιτόκιο, χρησιμοποιείται για την απλούστευση των πράξεων **ο τοκάριθμος και ο σταθερός διαιρέτης**. Τα μεγέθη αυτά έχουν εισαχθεί στα προγράμματα υπολογισμού του τόκου και στα συστήματα ηλεκτρονικών υπολογιστών των τραπεζών.

ISBN: 978-960-562-316-6

14843